Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2022/2023

Algebra und Zahlentheorie
Blatt 2
Abgabe: 8.11.2022, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei G eine (möglicherweise unendliche) Gruppe derart, dass jedes Element aus G Ordnung höchstens 2 besitzt. Zeige, dass G abelsch ist. Ist jede abelsche Gruppe von dieser Form?

Aufgabe 2 (5 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe mit 27 Elementen, welche auf der Menge X mit 46 Elementen von links wirkt. Zeige, dass es einen Fixpunkt x in X gibt (also ein x, sodass $\mathrm{Stab}(x) = G$).

HINWEIS: Beschreibe für y aus X die Primfaktorzerlegung des Index $(G : \mathrm{Stab}(y))$.

Aufgabe 3 (8 Punkte). Sei $n \geq 3$ und fasse $\mathcal{U}_n = \{e^{\frac{2i\pi k}{n}}\}_{0 \leq k \leq n-1}$ als Teilmenge der komplexen Zahlen auf. Betrachte folgende Bijektionen auf $\mathcal{U}_n$:

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathcal{U}_n & \to & \mathcal{U}_n \\ & z & \mapsto & \overline{z} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rccc} \tau : & \mathcal{U}_n & \to & \mathcal{U}_n \\ & z & \mapsto & e^{\frac{2i\pi}{n}} \cdot z \end{array},$$

wobei $z \mapsto \overline{z}$ die komplexe Konjugation bezeichnet.

(a) Bestimme die Ordnung von σ und von τ in der Untergruppe $H = \langle \sigma, \tau \rangle$ von $\mathrm{Sym}(\mathcal{U}_n)$.

(b) Zeige, dass $\tau^\sigma = \tau^{n-1}$. Schließe daraus, dass

$$H = \{1_{\mathcal{U}}, \tau, \ldots, \tau^{n-1}, \sigma, \sigma \cdot \tau, \ldots, \sigma \cdot \tau^{n-1}\}$$

genau $2n$ Elemente besitzt. Ist H eine abelsche Gruppe?

(c) Prüfe, ob $\langle \tau \rangle$ und $\langle \sigma \rangle$ Normalteiler von H sind.

(d) Beschreibe das Zentrum von H abhängig davon, ob n gerade oder ungerade ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei p eine Primzahl. Zeige mit Hilfe des noetherschen Isomorphiesatzes, dass jede Gruppe mit p Elementen isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist. Ist der Isomorphismus eindeutig?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.